

Задание 1. Решение уравнения колебаний и его визуализация

Создайте и разместите в отдельной сборке библиотеку классов для численного решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$.

Математическая постановка: рассматривается следующая задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, (x, y) \in \text{int } \Omega, 0 < t < T, \\ u(t, x, y) = \mu(x, y), (x, y) \in \partial\Omega, \\ u(0, x, y) = u_0(x, y), (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

На временном отрезке $[0, T]$ вводится сетка $t_n = n\tau, n = 0, \dots, K, \tau = T/K$, а в прямоугольнике Ω вводится сетка размером $N_1 \times N_2$

$$\begin{aligned} x_i &= ih_1, i = 0, \dots, N_1, h_1 = l_1 / N_1, \\ y_j &= jh_2, j = 0, \dots, N_2, h_2 = l_2 / N_2, \\ y_{i,j}^n &\sim u(t_n, x_i, y_j), y_{i,j}^0 = u_0(x_i, y_j), \mu_{ij} = \mu(x_i, y_j), \end{aligned}$$

Численное решение строится при помощи явной разностной схемы.

$$\frac{y_{i,j}^{n+1} - y_{i,j}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{i,j}^n + \Lambda_2 y_{i,j}^n, i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1.$$

где

$$\Lambda_1 y_{i,j} = \frac{y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j}}{h_1^2}, \Lambda_2 y_{i,j} = \frac{y_{i,j-1} - 2y_{i,j} + y_{i,j+1}}{h_2^2}.$$

Размеры сетки N_1 и N_2 , размеры физической области l_1 и l_2 , шаг интегрирования по времени h должны быть оформлены как свойства основного класса. Начальное значение поля температур и граничные условия должны быть оформлены как `Func<double,double,double>` или `Func<double,double>`.

Создайте приложение WPF, позволяющее отображать изменяющееся во времени решение уравнения теплопроводности в виде цветовой карты (heatmap). Цветовая карта размером $W \times H$ пикселей отображает значение решения $u(x, y)$ в прямоугольнике $\Omega = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$: цвет пикселя с координатам (t, v) определяется по значению функции $u(l_1(t+1/2)/W, l_2(v+1/2)/H)$. Для нахождения значений функции между узлами сетки применяется линейная интерполяция. Минимальное и максимальное значения, а также соответствующие им цвета должны задаваться в пользовательском интерфейсе. Приложение должно использовать модель Model-View-ViewModel.